5. Correction des exercices

<u>Exercice</u> 7.1 D'après la définition, si $f'(a)$ existe, $f'(a)$ vérifie : $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
Soient a et h des réels tels que $a \in \mathbb{R}^*$ et $a+h \in \mathbb{R}^*$, c'est-à-dire $a \neq 0$ et $h \neq -a$. Il vient :

$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{1}{h}\left(\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}\right)$
$= \frac{1}{h}\left(\frac{a\times 1}{a(a+h)} - \frac{(a+h)\times 1}{a(a+h)}\right)$
$= \frac{1}{h}\left(\frac{a-(a+h)}{a(a+h)}\right)$
$= \frac{1}{h}\left(\frac{\cancel{a}-\cancel{a}-h)}{a(a+h)}\right)$
$= \frac{-\cancel{h}}{\cancel{h}a(a+h)}$
$= \frac{-1}{a(a+h)}$

Lorsque $h \to 0$, on a

$$\lim_{h\to 0} \frac{-1}{a(a+h)}$$

existe et

$$\lim_{h\to 0} \frac{-1}{a(a+h)} = \frac{-1}{a^2}$$

En particulier pour $a = -1$, il vient $f'(-1) = \frac{-1}{(-1)^2} = \frac{-1}{1} = -1$

D'après la définition, si $f'(a)$ existe, $f'(a)$ vérifie : $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
Soient a et h des réels tels que $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}$. Il vient :

$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{1}{h}\left((a+h)^2 - 5(a+h) + 3 - (a^2 - 5a + 3)\right)$
$= \frac{1}{h}\left(\cancel{a^2} + 2ah + h^2 - \cancel{5a} - 5h + \cancel{3} - \cancel{a^2} + \cancel{5a} - \cancel{3}\right)$
$= \frac{1}{h}\left(2ah + h^2 - 5h\right)$
$= \frac{2a\cancel{h}+h-5\cancel{h}}{\cancel{h}}$
$= 2a + h - 5$

Lorsque $h \to 0$, on a

$$\lim_{h\to 0} 2a + h - 5$$

existe et

$$\lim_{h\to 0} 2a + h - 5 = 2a - 5$$

En particulier pour $a = 2$, il vient $f'(2) = 2 \times 2 - 5 = 4 - 5 = -1$

D'après la définition, si $f'(a)$ existe, $f'(a)$ vérifie : $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
Soient a et h des réels tels que $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}$. Il vient :

$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{1}{h}\left((a+h)^3 - 3(a+h) - (a^3 - 3a)\right)$
$= \frac{1}{h}\left(a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 - 3a - 3h - a^3 + 3a\right)$
$= \frac{1}{h}\left(3a^2h + 3ah^2 + h^3 - 3h\right)$
$= \frac{3a^2h+3ah^2-3h}{h}$
$= 3a^2 + 3ah - 3$

Lorsque $h \to 0$, on a

$$\lim_{h\to 0} 3a^2 + 3ah - 3$$

existe et

$$\lim_{h\to 0} 3a^2 + 3ah - 3 = 3a^2 - 3$$

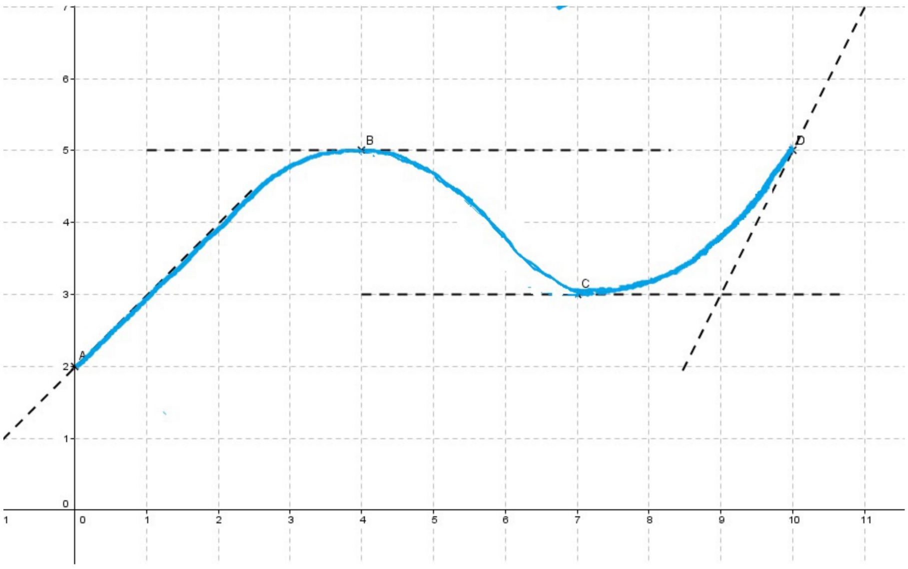
Et ceci pour tout $a \in \mathbb{R}$.

D'une manière générale, si $f(x) = x^n$, on aura $f'(a) = na^{n-1}$.
C'est bien pratique, surtout quand on sait que $\frac{1}{x} = x^{-1}$ et que $\sqrt{x} = x^{1/2}$...

Exercice 7.2 La tangente en A a une pente de 2 :lorsque l'on se "décale" d'un cran vers la droite, il faut "monter" de 2 crans pour revenir sur la tangente, d'où la pente +2). Donc le nombre dérivé associé est +2.

La tangente en B a une pente de $-\frac{1}{2}$:lorsque l'on se "décale" d'un cran vers la droite, il faut "descendre" de 1/2 cran pour revenir sur la tangente, d'où la pente -1/2). Donc le nombre dérivé associé est $-\frac{1}{2}$.

Exercice 7.3 La tangente en A est une droite qui passe par les points A(2 ;3) et B(4 ;-1). Nous allons chercher une équation de cette droite pour trouver son coefficient directeur ; si nous cherchons son "équation réduite" (équation de la forme $y = mx + p$), nous aurons tout de suite son coefficient directeur m. Pour cela, écrivons que les points A et B appartiennent à la droite en mettant leurs coordonnées dans l'équation $y = mx + p$.
$\begin{cases} y_A = mx_A + p \\ y_B = mx_B + p \end{cases}$
c'est-à-dire :
$\begin{cases} 3 = 2m + p \\ -1 = 4m + p \end{cases}$
On n'a même pas besoin de résoudre entièrement le système, il suffit de trouver m, donc d'éliminer p, par exemple en soustrayant les équations membre à membre. Il vient :
$3 - (-1) = 2m - 4m + p - p$, c'est-à-dire $4 = -2m$, d'où $m = -2$.
Donc $f'(2) = -2$ (la pente de la tangente au point A donne le nombre dérivé en x_A).



Exercice 7.4

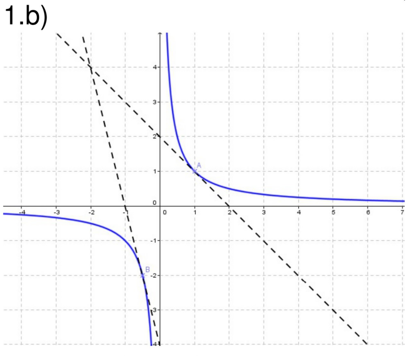
Exercice 7.5 1.a) On a vu à l'ex. 22p84 que lorsque $h \to 0$, on a

$$\lim_{h\to 0} \frac{-1}{a(a+h)}$$

existe et

$$\lim_{h\to 0} \frac{-1}{a(a+h)} = \frac{-1}{a^2}$$

En particulier pour $a = 1$, il vient $f'(1) = \frac{-1}{(1)^2} = \frac{-1}{1} = -1$
et pour $a = -\frac{1}{2}$, il vient $f'(-\frac{1}{2}) = \frac{-1}{(-\frac{1}{2})^2} = \frac{-1}{\frac{1}{4}} = -4$
1.b)



2) On a déjà, grâce au nombre dérivé, le coefficient directeur de ces droites, c'est-à-dire le nombre m dans une équation réduite du type $y = mx + p$.

Équation de T_A, la tangente au point A. On a $m = -1$, donc l'équation est de la forme $y = -x + p$.
Pour déterminer p, on met dans cette équation les coordonnées du point $A(1; f(1))$, c'est-à-dire $A(1; 1)$.
Il vient : $1 = -1 \times 1 + p$, d'où $1 = -1 + p$, d'où $p = 2$; l'équation de T_A est $y = -x + 2$ (ce qui est cohérent avec notre graphique).

Équation de T_B, la tangente au point B. On a $m = -4$, donc l'équation est de la forme $y = -4x + p$.
On détermine p grâce à la même méthode, on met dans cette équation les coordonnées du point $B(-\frac{1}{2}; f(-\frac{1}{2}))$, c'est-à-dire $B(-\frac{1}{2}; -2)$.
Il vient : $-2 = -4 \times (-\frac{1}{2}) + p$, d'où $-2 = 2 + p$, d'où $p = -4$; l'équation de T_B est $y = -4x - 4$ (ce qui est cohérent avec notre graphique).

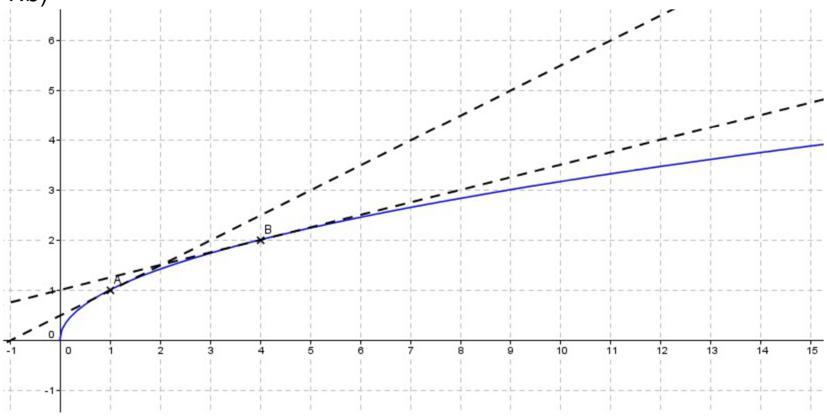
Exercice 7.6 1.a)D'après la définition, si $f'(a)$ existe, $f'(a)$ vérifie : $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
Soient a et h des réels tels que $a \in \mathbb{R}_+$ et h tel que $(a+h) \in \mathbb{R}_+$. Il vient :

$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}$
$= \frac{\left(\sqrt{a+h}-\sqrt{a}\right)\times\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)}{h\times\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)}$
$= \frac{\sqrt{a+h}^2-\sqrt{a}^2}{h\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)}$
$= \frac{(\cancel{a}+h)-\cancel{a}}{h\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)}$
$= \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)}$
$= \frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}$
Lorsque $h \to 0$, on a $\lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}$ existe et

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

Et ceci pour tout $a \in \mathbb{R}_+$.
Donc $f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$ et $f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$

1.b)



Les pentes des tangentes sont cohérentes avec les résultats trouvés à la question précédente.

2)On applique la même méthode que précédemment, en recherchant des équations réduites $y = mx + p$ dont on a déjà le coefficient directeur m.

Équation de T_A : $y = mx + p$ avec $m = \frac{1}{2}$. On cherche la valeur de p en mettant les coordonnées du point $A(1; f(1))$, i.e. $A(1; 1)$ dans cette équation ; il vient :
$1 = \frac{1}{2} \times 1 + p \Rightarrow p = 1 - \frac{1}{2} \Rightarrow p = \frac{1}{2}$
Ce résultat est cohérent avec le graphique (ordonnée à l'origine).

Équation de T_B : $y = mx + p$ avec $m = \frac{1}{4}$. On cherche la valeur de p en mettant les coordonnées du point $B(4; f(4))$, i.e. $B(4; 2)$ dans cette équation ; il vient :
$2 = \frac{1}{4} \times 4 + p \Rightarrow p = 2 - 1 \Rightarrow p = 1$
Ce résultat est cohérent avec le graphique (ordonnée à l'origine).

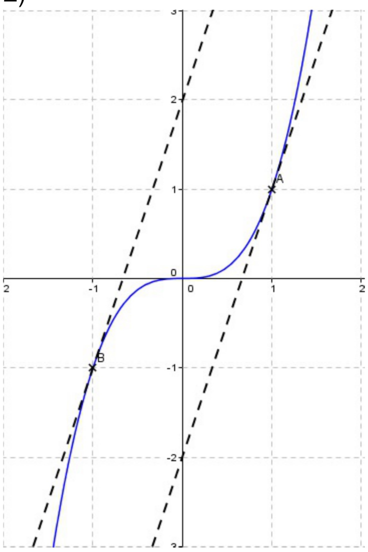
Exercice 7.7 1.a)D'après la définition, si $f'(a)$ existe, $f'(a)$ vérifie : $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
Soient a et h des réels tels que $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}$. Il vient :

$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)^3-a^3}{h}$
$= \frac{\cancel{a^3}+3a^2h+3ah^2+h^3-\cancel{a^3}}{h}$
$= \frac{3a^2h+3ah^2+h^3}{h}$
$= 3a^2 + 3ah + h^2$
Lorsque $h \to 0$, on a $\lim_{h\to 0} 3a^2 + 3ah + h^2$ existe et

$$\lim_{h\to 0} 3a^2 + 3ah + h^2 = 3a^2$$

Et ceci pour tout $a \in \mathbb{R}$.
Donc $f'(1) = 3 \times 1^2 = 3$ et $f'(-1) = 3 \times (-1)^2 = 3$.

2)



3.a)Les tangentes semblent parallèles.

3.b) Les tangentes SONT parallèles, car elles ont le même coefficient directeur (on l'a calculé à la 1ère question) ! Inutile de faire de gros calculs...

Exercice 7.8 On lit la pente de la tangente.

- a) $f'(1) = \frac{1}{3}$
- b) $f'(1) = 0$
- c) $f'(1) = 0$
- d) $f'(1) = -1$

Exercice 7.9 On lit la pente des tangentes :
T_A a pour pente $m_A = 0$.
T_B a pour pente $m_B = -3$.
T_C a pour pente $m_C = -\frac{2}{3}$.
T_D a pour pente $m_D = 4$.

Équations des tangentes :
On a déjà, grâce au nombre dérivé, le coefficient directeur de ces droites, c'est-à-dire le nombre m dans une équation réduite du type $y = mx + p$.

Équation de T_A, la tangente au point A. On a $m_A = 0$, donc l'équation est de la forme $y = 0x + p$.
Pour déterminer p, on met dans cette équation les coordonnées du point $A(-2; 6)$.
Il vient : $p = 6$; l'équation de T_A est $y = 6$ (ce qui est cohérent avec notre graphique).

Équation de T_B. On a $m_B = -3$, donc l'équation est de la forme $y = -3x + p$.
On détermine p grâce à la même méthode, on met dans cette équation les coordonnées du point $B(1; 2)$.
Il vient : $2 = -3 \times (1) + p$, d'où $2 = -3 + p$, d'où $p = 5$; l'équation de T_B est $y = -3x + 5$ (ce qui est cohérent avec notre graphique).

Équation de T_C. On a $m_C = -\frac{2}{3}$, donc l'équation est de la forme $y = -\frac{2}{3}x + p$.
On détermine p grâce à la même méthode, on met dans cette équation les coordonnées du point $C(3; -2)$.
Il vient : $-2 = -\frac{2}{3} \times (3) + p$, d'où $-2 = -2 + p$, d'où $p = 0$; l'équation de T_C est $y = -\frac{2}{3}x$ (ce qui est cohérent avec notre graphique).

Équation de T_D. On a $m_D = 4$, donc l'équation est de la forme $y = 4x + p$.
On détermine p grâce à la même méthode, on met dans cette équation les coordonnées du point $D(5; 1)$.
Il vient : $1 = 4 \times 5 + p$, d'où $1 = 20 + p$, d'où $p = -19$; l'équation de T_D est $y = 4x - 19$ (ce qui semble cohérent avec notre graphique).

Exercice 7.10 1°) $f'(x) = 6x + 5$, donc $f'(a) = -12 + 5 = -7$. De plus, $f(a) = 0$, d'où $T_a|y = -7(x+2)$, i.e. $T_a|y = -7x - 14$
2°) $f'(x) = x - \frac{7}{2}$, donc $f'(a) = \frac{3}{2}$. De plus, $f(a) = -\frac{5}{2}$, d'où $T_a|y = \frac{3}{2}(x-5) - \frac{5}{2}$, i.e. $T_a|y = \frac{3}{2}x - 10$
3°) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, donc $f'(a) = \frac{1}{6}$. De plus, $f(a) = 3$, d'où $T_a|y = \frac{1}{6}(x-9) + 3$, i.e.$T_a|y = \frac{1}{6}x + \frac{3}{2}$
4°) $f'(x) = 3x^2$, donc $f'(a) = 12$. De plus, $f(a) = 8$, d'où $T_a|y = 12(x-2) + 8$, i.e.$T_a|y = 12x - 16$